Mécanique du Point

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Cinématique

Type	Cartésien	Cylindrique	Sphérique	Frénet
Position	$x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$	$r\overrightarrow{u_r} + \theta\overrightarrow{u_\theta} + z\overrightarrow{u_z}$	$r\overrightarrow{u_r} + \theta\overrightarrow{u_\theta} + \varphi\overrightarrow{u_\varphi}$	$s\overrightarrow{T}$
Vitesse	$\dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$	$\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$		$\dot{s}\overrightarrow{T}$
Accélération	$\ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$		$\ddot{s}\overrightarrow{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\overrightarrow{N}$

Lois de Newton

Principe d'inertie

(Pour un système isolé)

$$m\overrightarrow{v}_{\text{ref gali}} = \text{cst}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

$$\boxed{m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_i}}$$

Principe des actions réciproques

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

Forces Usuelles

- Poids : $\boxed{\overrightarrow{F_p} = m\overrightarrow{g}}$
- Frottements fluides laminaires : $\boxed{\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}}$
- Frottements fluides turbulents : $\boxed{\overrightarrow{F_f} = -\beta\|v\|\overrightarrow{v}}$
- Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide}}\overrightarrow{g}$
- Réaction d'un support : $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}}$
- Force de Hooke d'un ressort s'allongeant selon $\overrightarrow{u_x}$: $\boxed{\overrightarrow{F_H} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x}}$

Energétique

Puissance d'une force

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Travail infinitésimal d'une force

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = P(\vec{F})\mathrm{d}t = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Travail d'une force

$$\boxed{W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t}$$

Energie cinétique

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Energie potentielle

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_p = -W_{M_0 \to M}} \qquad \boxed{\delta\mathcal{E}_p = -\delta W}$$

Energie mécanique

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}$$

Théorème de la puissance cinétique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F})}$$

Théorème de la puissance mécanique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\cancel{\text{conservative}}}(\vec{F})}$$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = W_{M_1 \to M_2}(\vec{F})}$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_m = W_{\cancel{\text{conservative}}, M_1 \to M_2}(\vec{F})}$$

Force conservative

$\vec{F}$ est conservative $\iff$ $W(\vec{F})$ ne dépend que de M_1 et M_2.

Exemples :

Force uniforme

$$\vec{F} = f\overrightarrow{u_x}$$

$$\mathcal{E}_p(M) = -f(x - x_0) + \mathcal{E}_p(M_0)$$

Force harmonique

$$\vec{F} = -kr\overrightarrow{u_r}$$

$$\mathcal{E}_p(M) = -\frac{1}{2}k(r^2 - {r_0}^2) + \mathcal{E}_p(M_0)$$

Force newtonienne

$$\vec{F} = -\tfrac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$\mathcal{E}_p(M) = -k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \mathcal{E}_p(M_0)$$

Forces Centrales

Force centrale

$$\vec{F} = F_r(r, \theta, \varphi)\vec{u_r}$$

Intéraction Newtonienne

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$$

Forces centrales usuelles

Force gravitationnelle

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}$$

Force de Coulomb

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u_r}$$

Conservation du moment cinétique

Force centrale de centre O :

$$\overrightarrow{L_O}(M) = \text{cst}$$

Loi des aires

L'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant Δt est proportionnelle à Δt

Force centrale conservative

$$\boxed{\vec{F} \text{ conservative } \iff F_r \propto r = OM}$$

Lien avec l'énergie potentielle

$$\boxed{\vec{F} \text{ conservative } \implies \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathcal{E}_p\vec{u_r}}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}}$$

Cas particulier : Intéraction gravitationnelle

Force gravitationnelle

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u_r}$$

Energie potentielle gravitationnelle

$$\mathcal{E}_p = -G\frac{mM}{r}$$

Conservation du moment cinétique

$$r\dot{\theta}^2 = C(\text{cst})$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - G\frac{mM}{r}$$

Etat lié

Etat lié : trajectoire circulaire ou elliptique

Etat de diffusion

Etat de diffusion : trajectoire hyperbolique (ciao)

Lois de Kepler

Loi des orbites

Chaque planète décrit, selon un mouvement périodique, une trajectoire elliptique dont le Soleil est un foyer.

Loi des aires

L'aire balayée par le rayon vecteur planète-Soleil est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.

Loi des périodes

Si T est la période de révolution d'une planète autour du Soleil et a le demi-grand axe de son orbite, alors $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{soleil}})}$